ゲームの理論による，経済行動基準の研究

小　林　和　司

目　　次

はじめに

一般に小規模な未開社会から大規模な社会への移行においては，人々の相互依存関係がより複雑かつ広範囲になり，人々の利害や期待を調整するためのメカニズムの発達が要請されるようになる。

平山朝治氏の研究[1]によれば，できるかぎり相手の利害を相互に尊重し，可能な限り相手の期待にそうようにふるまう，という思いやりのある行動

様式は，まさにその要請に答えるもののうちの1つである。

歴史的には，そうした行動様式は大規模な社会における権力の中心部，支配階層の人々の間で発達してきたものであり，文明社会の特色とみるべきである。

例えば西欧においては，それは絶対主義宮廷貴族社会において発達した。ただしイギリス以外の西欧，すなわちフランスやフランスを模範とした諸国においては，それは社交界という閉鎖的集団内部に限定されて発達した。というのは貴族が，台頭するブルジョワに対して文化的優位を維持しようとする傾向が強かったらである。ところが，イギリスの貴族はフランスほど閉鎖的ではなかったので，そうした行動様式は上昇志向の強い人々にも広まった。産業革命期のイギリスのブルジョワ達の夢は，事業の成功で得た資金で土地を買って貴族の仲間入りをし，社交界に受け入れられることであった。

他方，日本においてもそうした行動様式は，平安貴族社会において発達をみた。そして新興階層が没落しつつある貴族階層の行動をまねるという形で，濃淡の差はあれ京都を中心とした全社会に普及し，現在に至っても長期継続的取引関係を重視する日本的慣行の中に脈々と受け継がれ，お互いに相手の期待にそうよう努力することによって実現される「和」が重視されている。

こうしたことと，イギリスで産業革命がおこり，日本で戦後経済が繁栄したという歴史的事実を考え併せると，没落貴族の利他的行動様式よりも新興ブルジョワの利己的行動様式の方が経済的成功をもたらしたために，新興ブルジョワの利己的行動様式だけが経済行動として普及したという考えをそのまま受け入れるわけにはいかない。

イギリスに代わって資本主義をリードしてきた米国は，貴族のいない純粋ブルジョワ社会であったために，たまたまそうした利他的行動様式が経

済行動にまであまり普及しなかったと考えられる。

そこで筆者は本論文において，そうした相手を思いやるという行動様式を利他的行動基準としてゲームの理論を使って定式化し，新興ブルジョワの行動様式をゲームの理論で定式化されている利己的行動基準として把え，経済行動基準としての観点から利他的行動基準と利己的行動基準を比較することによって，利他的行動基準の経済行動基準としての重要性を明らかにした。

なお，本論文で扱うゲームはすべて有限ゲームである。

第1節　非協力ゲーム

本節では，非協力ゲームを定義し，そのゲームにおいて全プレイヤーが利己的行動基準に従う場合と，全プレイヤーが利他的行動基準に従う場合の均衡点及びプレイヤーの受けとる利得を比較する。

まず，「利他的行動基準」が示す内容を明確にするために，一番単純な非協力ゲーム，すなわちゼロ和2人ゲームによって論じていくことにする。

1.　ゼロ和2人ゲーム

プレイヤーは，1と2の2人であるとする。このときプレイヤー1の持つ純粋戦略の集合を

$$\Pi_1=\{\pi_{11}, \pi_{12}, \ldots, \pi_{1j}, \ldots, \pi_{1k_1}\} \tag{1-1}$$

とし，プレイヤー2の持つ純粋戦略の集合を

$$\Pi_2=\{\pi_{21}, \pi_{22}, \ldots, \pi_{2j}, \ldots, \pi_{2k_2}\} \tag{1-2}$$

とする。そしてプレイヤー1の混合戦略の集合を

$$S_1=\{s_1=(p_{11}, p_{12}, \ldots, p_{1j}, \ldots, p_{1k_1})\} \tag{1-3}$$

とし，プレイヤー2の混合戦略の集合を

$$S_2=\{s_2=(p_{21}, p_{22}, \ldots, p_{2j}, \ldots, p_{2k_2})\} \quad (1\text{-}4)$$

とする。ここで，p_{ij} はプレイヤー i が純粋戦略 π_{ij} をとる確率である。ゆえに

$$\text{任意の } j \text{ に対して } p_{ij} \geqq 0 \ (i=1, 2) \quad (1\text{-}5)$$

であり，かつ

$$\sum_{j=1}^{k_i} p_{ij}=1 (i=1, 2) \quad (1\text{-}6)$$

を満たしている。

S_1 と S_2 の直積集合を

$$S=S_1 \times S_2 \quad (1\text{-}7)$$

とし，S の点を

$$s=(s_1, s_2) \quad (1\text{-}8)$$

とする。プレイヤー1の利得を y とすると，y は S の点 s によって定まる関数である。すなわち，

$$y=f(s)=f(s_1, s_2)=\sum_{m_1=1}^{k_1}\sum_{m_2=1}^{k_2} H(\pi_{1m_1}, \pi_{2m_2}) p_{1m_1} p_{2m_2} \quad (1\text{-}9)$$

ただし $H(\pi_{1m_1}, \pi_{2m_2})$ は，プレイヤー1が純粋戦略 π_{1m_1} をとりプレイヤー2が純粋戦略 π_{2m_2} をとったときのプレイヤー1の受けとる利得である。そしてゼロ和ゲームであるから，プレイヤー2の利得は $(-y)$ で示される。

さて，上で定義されたゼロ和2人ゲームにおいて全プレイヤーが利己的行動基準に従って行動する場合，すなわち「自分ができるだけ多くの利得を受けとる」ように行動する場合，ミニマックス定理の名で知られる次の定理が成立する。

定理1

$$V_1=\max_{s_1} \min_{s_2} f(s_1, s_2) \quad (1\text{-}10)$$

$$V_2=\min_{s_2}\ \max_{s_1} f(s_1, s_2) \tag{1-11}$$

とすると，$V_1=V_2$ である。

この定理1により，

$$\max_{s_1}\ \min_{s_2} f(s_1, s_2)=f(s_1^*, s_2^*)=\min_{s_2}\ \max_{s_1} f(s_1, s_2) \tag{1-12}$$

を満たす点 (s_1^*, s_2^*) は，このゲームにおいて，全プレイヤーが利己的行動基準に従って行動した場合の均衡点（以下，利己的均衡点と呼ぶ）である。

それでは，ゼロ和2人ゲームにおいて全プレイヤーが利他的行動基準に従って行動する場合を考える。利他的行動基準とは「相手にできるだけ多くの利得を与える」あるいは「相手にできるだけ少ない損失を与える」というものである。すなわち，プレイヤー1は，$f(s_1, s_2)$ をできるだけ小さくするように s_1 を選び，プレイヤー2は，$f(s_1, s_2)$ をできるだけ大きくするように s_2 を選ぶことになる。

さてプレイヤー1は，どのような混合戦略を選ぼうともプレイヤー2に対して，最大で $\max_{s_2} f(s_1, s_2)$ だけの損失を与える可能性がある。プレイヤー1が混合戦略 $s_1^{*\prime}$ をとるときに $\max_{s_2} f(s_1, s_2)$ が最小値をとるものとし，その最小値を V_1' とすると，

$$V_1'=\min_{s_1}\ \max_{s_2} f(s_1, s_2)=\max_{s_2} f(s_1^{*\prime}, s_2) \tag{1-13}$$

が成立する。

他方プレイヤー2は，どのような混合戦略を選ぼうともプレイヤー1に対して，少なくとも $\min_{s_1} f(s_1, s_2)$ だけの利得を与えることができる。プレイヤー2が混合戦略 $s_2^{*\prime}$ をとるときに $\min_{s_1} f(s_1, s_2)$ が最大値をとるものとし，その最大値を V_2' とすると，

$$V_2'=\max_{s_2}\ \min_{s_1} f(s_1, s_2)=\min_{s_1} f(s_1, s_2^{*\prime}) \tag{1-14}$$

が成立する。このとき，定理1に相当する定理が成立する。

定理1′

$$V'_1=\min_{s_1}\max_{s_2} f(s_1, s_2) \tag{1-15}$$

$$V'_2=\max_{s_2}\min_{s_1} f(s_1, s_2) \tag{1-16}$$

とすると，$V'_1=V'_2$ である。

定理1′を証明するにあたり，補助定理を出しておく。

補助定理[2]

$$\sum_{m_1=1}^{k_1} H(\pi_{1m_1}, \pi_{2m_2})p_{1m_1} \leqq 0 (m_2=1, \dots, k_2) \tag{1-17}$$

を満たすベクトル s_1 が存在するか，

$$\sum_{m_2=1}^{k_2} H(\pi_{1m_1}, \pi_{2m_2})p_{2m_2} \geqq 0 (m_1=1, \dots, k_1) \tag{1-18}$$

を満たすベクトル s_2 が存在するか，少なくともどちらか一方が必ず成立する。

定理1′の証明

(1-17) が成立するとき，

$$\max_{m_2}\sum_{m_1=1}^{k_1} H(\pi_{1m_1}, \pi_{2m_2})p_{1m_1} \leqq 0 \tag{1-19}$$

が成立する。ところが V'_1 は，

$$\begin{aligned} V'_1&=\min_{s_1}\max_{s_2} f(s_1, s_2) \\ &=\min_{s_1}\max_{m_2} f(s_1, \pi_{2m_2}) \\ &=\min_{s_1}\max_{m_2}\sum_{m_1=1}^{k_1} H(\pi_{1m_1}, \pi_{2m_2})p_{1m_1} \end{aligned} \tag{1-20}$$

と変形できる[3]。ゆえに (1-19) より，

$$V'_1 \leqq 0 \tag{1-21}$$

となる。他方 (1-18) が成立するとき，

$$\min_{m_1} \sum_{m_2=1}^{k_2} H(\pi_{1m_1}, \pi_{2m_2}) p_{2m_2} \geqq 0 \tag{1-22}$$

が成立する。ところが V'_2 は，

$$V'_2 = \max_{s_2} \min_{s_1} f(s_1, s_2)$$
$$= \max_{s_2} \min_{m_1} f(\pi_{1m_1}, s_2)$$
$$= \max_{s_2} \min_{m_1} \sum_{m_2=1}^{k_2} H(\pi_{1m_1}, \pi_{2m_2}) p_{2m_2} \tag{1-23}$$

と変形できるので，(1-22) より

$$V'_2 \geqq 0 \tag{1-24}$$

となる。

ここで補助定理より，(1-17) と (1-18) が同時に成立しないということはあり得ないことがわかる。つまり，(1-21) と (1-24) より

$$V'_1 > 0 \text{ かつ } V'_2 < 0 \tag{1-25}$$

とはならないのである。

今度は任意の数 ω を選び，利得 $H(\pi_{1m_1}, \pi_{2m_2})$ を $\{H(\pi_{1m_1}, \pi_{2m_2}) - \omega\}$ と置き換えてみる。すると $f(s_1, s_2)$ は，

$$f(s_1, s_2) = \sum_{m_1=1}^{k_1} \sum_{m_2=1}^{k_2} \{H(\pi_{1m_1}, \pi_{2m_2}) - \omega\} p_{1m_1} p_{2m_2}$$
$$= \sum_{m_1=1}^{k_1} \sum_{m_2=1}^{k_2} H(\pi_{1m_1}, \pi_{2m_2}) p_{1m_1} p_{2m_2}$$
$$- \omega \sum_{m_1=1}^{k_1} \sum_{m_2=1}^{k_2} p_{1m_1}, p_{2m_2}$$
$$= f(s_1, s_2) - \omega \tag{1-26}$$
$$\because \sum_{m_1=1}^{k_1} \sum_{m_2=1}^{k_2} p_{1m_1}, p_{2m_2} = 1$$

と置き換えられる。そこで V'_1 と V'_2 はそれぞれ $(V'_1 - \omega)$ と $(V'_2 - \omega)$ によって置き換えられることになる。従って $(V'_1 - \omega)$ と $(V'_2 - \omega)$ に

(1-25) をあてはめると,

$$V_1' > \omega > V_2' \tag{1-27}$$

とはならないことがわかる。

今仮に $V_1' > V_2'$ であるとすると, (1-27) を満たす ω が存在することになり矛盾。ゆえに,

$$V_1' \leqq V_2' \tag{1-28}$$

が成立する。ところが, 任意の $s_1^{*\prime}, s_2^{*\prime}$ に対して,

$$\max_{s_2} f(s_1^{*\prime}, s_2) \geqq f(s_1^{*\prime}, s_2^{*\prime}) \geqq \min_{s_1} f(s_1, s_2^{*\prime}) \tag{1-29}$$

が成立するので, (1-13) と (1-14) より,

$$V_1' \geqq V_2' \tag{1-30}$$

が成立する。

従って (1-28) と (1-30) より $V_1' = V_2'$ となる。　　　(証明終わり)

この定理1′と (1-29) より,

$$\max_{s_2} f(s_1^{*\prime}, s_2) = f(s_1^{*\prime}, s_2^{*\prime}) = \min_{s_1} f(s_1, s_2^{*\prime}) \tag{1-31}$$

が成立する。さらに (1-31) は任意の s_1, s_2 に対して

$$f(s_1^{*\prime}, s_2) \leqq f(s_1^{*\prime}, s_2^{*\prime}) \leqq f(s_1, s_2^{*\prime}) \tag{1-32}$$

が成立することと同値である。

従ってプレイヤー1にとっては, 相手 (プレイヤー2) が混合戦略 $s_2^{*\prime}$ をとってきた場合には, $s_1^{*\prime}$ が利他的行動基準に照らして最善の混合戦略となっているし, プレイヤー2にとっては, 相手 (プレイヤー1) が混合戦略 $s_1^{*\prime}$ をとってきた場合には, $s_2^{*\prime}$ が利他的行動基準に照らして最善の混合戦略となっていることがわかる。すなわち点 $(s_1^{*\prime}, s_2^{*\prime})$ は, このゲームにおいて全プレイヤーが利他的行動基準に従って行動した場合の均衡点 (以下, 利他的均衡点と呼ぶ) である[(4)]。

2. 非協力 n 人ゲーム

では以上の結果をより一般的な非協力 n 人ゲームにあてはめてみることにする。

標準形による n 人ゲームを考え，プレイヤー i の持つ純粋戦略の集合を，

$$\Pi_i=\{\pi_{i1}, \pi_{i2}, \ldots, \pi_{ij}, \ldots, \pi_{ik_i}\}(i=1, \ldots, n) \tag{1-33}$$

とする。そしてプレイヤー i の持つ混合戦略の集合を

$$S_i=\{s_i=(p_{i1}, p_{i2}, \ldots, p_{ij}, \ldots, p_{ik_i})\}(i=1, \ldots, n) \tag{1-34}$$

とする。ここで p_{ij} はプレイヤー i が純粋戦略 π_{ij} をとる確率である。ゆえに

任意の j に対して

$$p_{ij}\geqq 0(i=1, \ldots, n) \tag{1-35}$$

であり，かつ

$$\sum_{j=1}^{k_i} p_{ij}=1(i=1, \ldots, n) \tag{1-36}$$

を満たしている。

次に S_i の直積集合を

$$S=S_1\times S_2\times\ldots\times S_n \tag{1-37}$$

S の点を

$$s=(s_1, s_2, \ldots, s_n) \tag{1-38}$$

とする。プレイヤー i の利得を y_i とすると，y_i は S の点 s によって定まる関数である。すなわち

$$y_i=f_i(s)=f_i(s_1, s_2, \ldots, s_n)=\sum_{m_1=1}^{k_1}\sum_{m_2=1}^{k_2}\cdots\sum_{m_n=1}^{k_n} H_i(\pi_{1m_1}, \pi_{2m_2}, \ldots, \pi_{nm_n})p_{1m_1}p_{2m_2}\ldots p_{nm_n} \tag{1-39}$$

ただし $H_i(\pi_{1m_1}, \pi_{2m_2}, \ldots, \pi_{nm_n})$ は，プレイヤー $1, 2, \ldots, n$ がそれぞれ純粋戦略 $\pi_{1m_1}, \pi_{2m_2}, \ldots, \pi_{nm_n}$ をとったときのプレイヤー i の利得である。

従って $f_i(s)$ という関数は，S という集合で定義された実数値連続関数である。そしてそれは n 個の実数 $p_{1m_1}, p_{2m_2}, \ldots, p_{nm_n}$ に関して1次関数である。さらに各混合戦略の集合 S_i はユークリッド空間における有界閉凸集合であるから，その直積集合である S もユークリッド空間における有界閉凸集合である。

さて便宜のために，$(n-1)$ 個の S_i の直積集合，及びその点を次のように表わすことにする。

$$\bar{S}_i \equiv S_1 \times \ldots \times S_{i-1} \times S_{i+1} \times \ldots \times S_n \tag{1-40}$$

$$\bar{s}_i \equiv (s_1, \ldots, s_{i-1}, s_{i+1}, \ldots, s_n) \tag{1-41}$$

そして s の i 番目の成分を t_i で置き換えた点を

$$(\bar{s}_i, t_i) \equiv (s_1, \ldots, s_{i-1}, t_i, s_{i+1}, \ldots, s_n) \tag{1-42}$$

と表わすことにする。

この非協力 n 人ゲームがゼロ和ゲームとなるのは，

任意の s に対して，

$$\sum_{i=1}^{n} f_i(s) = 0 \tag{1-43}$$

が成立するときであり，定数和ゲームとなるのは，

任意の s に対して

$$\sum_{i=1}^{n} f_i(s) = C \text{（定数）} \tag{1-44}$$

が成立するときである。変動和ゲームの場合には，付加条件はない。

(1)　利己的均衡点

さて，このように定義された非協力 n 人ゲームにおいて利己的均衡点は，ゲームの理論により次のように定義されていた。

Sの点 $s^*=(s_1^*, s_2^*, \ldots, s_n^*)$ が次の条件を満たすとき，この点を非協力n人ゲームの利己的均衡点という。

$$\begin{cases} f_1(s^*)=\max\limits_{s_1} f_1(\bar{s}_1^*, s_1) \\ f_2(s^*)=\max\limits_{s_2} f_2(\bar{s}_2^*, s_2) \\ \qquad\vdots \\ f_n(s^*)=\max\limits_{s_n} f_n(\bar{s}_n^*, s_n) \end{cases}$$

以上まとめて，(1-45)

そしてこの利己的均衡点に対して次の定理が成立していた。

定理2

有限な非協力n人ゲームには，利己的均衡点が，混合戦略の範囲で少なくとも1つ存在する。

(2) 利他的均衡点

それでは次に，非協力n人ゲームにおいて利他的均衡点を次のように定義する。

Sの点 $s^{*\prime}=(s_1^{*\prime}, s_2^{*\prime}, \ldots, s_n^{*\prime})$ が次の条件を満たすとき，この点を非協力n人ゲームの利他的均衡点という。

$$\begin{cases} f_1(s^{*\prime})=\min\limits_{s_1} f_1(\bar{s}_1^{*\prime}, s_1) \\ f_2(s^{*\prime})=\min\limits_{s_2} f_2(\bar{s}_2^{*\prime}, s_2) \\ \qquad\vdots \\ f_n(s^{*\prime})=\min\limits_{s_n} f_n(\bar{s}_n^{*\prime}, s_n) \end{cases}$$

以上まとめて，(1-46)

上の定義において，$n=2$ のときのゼロ和ゲームの利他的均衡点は，先に求めたゼロ和2人ゲームの利他的均衡点に一致する[5]。

そしてこの利他的均衡点については，定理2に相当する定理が成立す

る。

定理2′

有限な非協力 n 人ゲームには，利他的均衡点が，混合戦略の範囲で少なくとも1つ存在する。

定理2の証明にならって[6]，定理2′を5段階に分けて証明する。

定理2′の証明

(i)　$S_1, \dots, S_n$ 及び $S, \bar{S}_i$ はいずれも，ユークリッド空間におけるコンパクトな凸集合である。

(ii)　$\bar{S}_i(i=1, 2, \dots, n)$ の任意の1点 $\bar{s}_i$ が与えられたとき，$f_i(s)$ を最小にするような S_i の点 s_i の集合を $S_i'(\bar{s}_i)$ とする。すなわち $S_i'(\bar{s}_i)$ は，与えられた $\bar{s}_i$ に対するプレイヤー i の最善混合戦略の集合である。
従って，

$$S_i'(\bar{s}_i)=\{s_i\ ;\ s_i\in S_i, f_i(\bar{s}_i, s_i)=\min_{s_i} f_i(\bar{s}_i, s_i)\} \qquad (1\text{–}47)$$

このような S_i の部分集合 $S_i'(\bar{s}_i)$ が $\bar{S}_i$ のすべての点 $\bar{s}_i$ に対応して定まる。これらの集合は，すべて空でなく，かつ2点が $S_i'(\bar{s}_i)$ に属するならば，利得関数 f の1次性により，その凸1次結合もまた同一の $S_i'(\bar{s}_i)$ に属するから，この集合は凸集合である。

(iii)　今 $S_i'(\bar{s}_i)$ に属する無限系列 $s_i^1, s_i^2, \dots$ をとり，$s_i^n \to s_i^{*\prime}$ とする。$f_i^n=f_i^n(\bar{s}_i, s_i^n)$ を考えると，$f_i(\bar{s}_i, s_i)$ は s_i に関して連続であるから，$f_i^{*\prime}=f_i^{*\prime}(\bar{s}_i, s_i^{*\prime})$ とすると，$s_i^n\to s_i^{*\prime}$ のとき $f_i^n\to f_n^{*\prime}$ である。従って

$$f_i^{*\prime}(\bar{s}_i, s_i^{*\prime})=\min_{s_i} f_i(\bar{s}_i, s_i) \qquad (1\text{–}48)$$

が成立し，$s_i^{*\prime}$ は $S_i'(\bar{s}_i)$ に属する。従って $S_i'(\bar{s}_i)$ は閉集合である。

(iv)　S の任意の1点 s が与えられたとき，各成分 s_i を $S_i'(\bar{s}_i)$ に移す写像を g とすると，

$$g(s)=g(s_1, s_2, \ldots, s_n)=\{S'_1(\bar{s}_1), S'_2(\bar{s}_2), \ldots, S'_n(\bar{s}_n)\} \qquad (1\text{-}49)$$

と表わされる。この写像gは，Sからその部分集合族への点対集合の写像である。

その像

$$\{S'_1(\bar{s}_1), S'_2(\bar{s}_2), \ldots, S'_n(\bar{s}_n)\} \qquad (1\text{-}50)$$

を考えると，閉凸集合 $S'_i(\bar{s}_i)$ の直積集合であるから，やはり閉凸集合である。このように，このSからSの部分集合の族への点対集合の写像 $s\to g(s)$ の像が閉集合であるときgは上半連続であるという。

(v) 角谷の不動点定理より，写像gには不動点が存在する。従って，今不動点を $s^{*\prime}$ とすると，

$$s^{*\prime}\in g(s^{*\prime}) \qquad (1\text{-}51)$$

$$(s_1^{*\prime}, s_2^{*\prime}, \ldots, s_n^{*\prime})\in g(s_1^{*\prime}, s_2^{*\prime}, \ldots, s_n^{*\prime}) \qquad (1\text{-}52)$$

従って，すべての i に対して

$$s_i^{*\prime}\in S'_i(\bar{s}_i^{*\prime}) \qquad (1\text{-}53)$$

$$\therefore f_i(s^{*\prime})=\min_{s_i} f_i(\bar{s}_i^{*\prime}, s_i) \qquad (1\text{-}54)$$

が成立し，利他的均衡点の条件（1-46）を満たしている。すなわち不動点 $s^{*\prime}$ は利他的均衡点となる。従って，このゲームには少なくとも1つ利他的均衡点が存在する。

（証明終わり）

(3) 利得の比較

それでは，非協力n人ゲームにおいて，全プレイヤーが利己的行動基準に従って行動する場合のゲーム（以下，利己的ゲームと呼ぶ）と全プレイヤーが利他的行動基準に従って行動する場合のゲーム（以下，利他的ゲームと呼ぶ）とで，プレイヤーが受けとる利得にどのような差があるかを考察する。

(i) ゼロ和（定数和）ゲームの場合

非協力ゼロ和 n 人ゲームにおける利己的均衡点を s^*，利他的均衡点を $s^{*\prime}$ とすると，(1-43) より，

$$\sum_{i=1}^{n} f_i(s^*) = \sum_{i=1}^{n} f_i(s^{*\prime}) \qquad (1\text{-}55)$$

が成立する。従って，利己的ゲームでも利他的ゲームでも，全プレイヤーの受けとる総利得は等しいことがわかる。

定数和ゲームにおいても (1-44) より，(1-55) が成立するので，ゼロ和ゲームと同じ結論を得る。

(ii) 変動和ゲームの場合

非協力変動和2人ゲームの利己的均衡点 s^* が満たす条件は，(1-45) より

$$\begin{cases} f_1(s^*) = \max\limits_{s_1} f_1(\bar{s}_1^*, s_1) \\ f_2(s^*) = \max\limits_{s_2} f_2(\bar{s}_2^*, s_2) \end{cases}$$

以上まとめて，(1-56)

である。これを書き換えると，

$$\begin{cases} f_1(s_1^*, s_2^*) = \max\limits_{s_1} f_1(s_1, s_2^*) \\ f_2(s_1^*, s_2^*) = \max\limits_{s_2} f_2(s_1^*, s_2) \end{cases}$$

以上まとめて，(1-57)

となるが，さらに (1-57) は

$$\begin{cases} \text{任意の } s_1, s_2 \text{ に対して} \\ f_1(s_1^*, s_2^*) \geqq f_1(s_1, s_2^*) \\ f_2(s_1^*, s_2^*) \geqq f_2(s_1^*, s_2) \end{cases}$$

以上まとめて，(1-58)

と同値である。

同様にして，非協力変動和人２ゲームの利他的均衡点 $s^{*\prime}$ が満たす条件は，(1-46) より

$$\begin{cases} \text{任意の } s_1, s_2 \text{ に対して} \\ f_1(s_1^{*\prime}, s_2^{*\prime}) \leqq f_1(s_1, s_2^{*\prime}) \\ f_2(s_1^{*\prime}, s_2^{*\prime}) \leqq f_2(s_1^{*\prime}, s_2) \end{cases}$$

以上まとめて，(1-59)

と書ける。

さて今，非協力変動和２人ゲームの利得表が具体的に表１のように与えられているとする[7]。表１において（　）内の左側の数は，プレイヤー１の受けとる利得を表わし，右側の数はプレイヤー２の受けとる利得を表わす。例えば表１の（２，１）は，プレイヤー１が純粋戦略 π_{11} をとり，プレイヤー２が純粋戦略 π_{21} をとったときの各プレイヤーの受けとる利得を示している。

表 1

	π_{21}	π_{22}
π_{11}	（２，１）	（−１，−１）
π_{12}	（−１，−１）	（１，２）

２人のプレイヤーが共に利己的行動基準に従って行動する場合，

$$s_1^* = (1, 0), \quad s_2^* = (1, 0) \qquad (1\text{-}60)$$

とおくと，表１より

$$f_1(s_1^*, s_2^*) = 2, \quad f_2(s_1^*, s_2^*) = 1 \qquad (1\text{-}61)$$

であって，プレイヤー１の任意の混合戦略

$$s_1 = (p_1, 1-p_1) \quad (0 \leqq p_1 \leqq 1) \qquad (1\text{-}62)$$

に対して

$$f_1(s_1, s_2^*) = 2p_1 - (1-p_1) = 3p_1 - 1 \leqq 2 \qquad (1\text{-}63)$$

であるので，(1-61) より任意の s_1 に対して

$$f_1(s_1^*, s_2^*) \geqq f_1(s_1, s_2^*) \tag{1-64}$$

が成立している。

他方，プレイヤー2の任意の混合戦略

$$s_2=(p_2, 1-p_2)\ (0 \leqq p_2 \leqq 1) \tag{1-65}$$

に対して

$$f_2(s_1^*, s_2)=p_2-(1-p_2)=2p_2-1 \leqq 1 \tag{1-66}$$

であるので，(1-61) より任意の s_2 に対して

$$f_2(s_1^*, s_2^*) \geqq f_2(s_1^*, s_2) \tag{1-67}$$

が成立している。

ゆえに (1-58) より，(1-60) で示される点は利己的均衡点であり，そのとき各プレイヤーの受けとる利得は（2，1）である。

次に2人のプレイヤーが共に利他的行動基準に従って行動する場合，

$$s_1^{*\prime}=(0, 1),\quad s_2^{*\prime}=(1, 0) \tag{1-68}$$

とおくと，表1より

$$f_1(s_1^{*\prime}, s_2^{*\prime})=-1,\ f_2(s_1^{*\prime}, s_2^{*\prime})=-1 \tag{1-69}$$

であって，プレイヤー1の任意の混合戦略

$$s_1=(p_1, 1-p_1)\ (0 \leqq p_1 \leqq 1) \tag{1-70}$$

に対して

$$f_1(s_1, s_2^{*\prime})=2p_1-(1-p_1)=3p_1-1 \geqq -1 \tag{1-71}$$

であるので，(1-69) より任意の s_1 に対して

$$f_1(s_1^{*\prime}, s_2^{*\prime}) \leqq f_1(s_1, s_2^{*\prime}) \tag{1-72}$$

が成立している。

他方，プレイヤー2の任意の混合戦略

$$s_2=(p_2, 1-p_2)\ (0 \leqq p_2 \leqq 1) \tag{1-73}$$

に対して

$$f_2(s_1^{*\prime}, s_2) = -p_2 + 2(1-p_2) = -3p_2 + 2 \geqq -1 \tag{1-74}$$

であるので，(1-69) より任意の s_2 に対して

$$f_2(s_1^{*\prime}, s_2^{*\prime}) \leqq f_2(s_1^{*\prime}, s_2) \tag{1-75}$$

が成立している。

ゆえに (1-59) より，(1-68) で示される点は利他的均衡点であり，そのとき各プレイヤーの受けとる利得は (−1, −1) である。

従って表1のような利得表を持つ非協力変動和2人ゲームの場合，利己的ゲームの方が利他的ゲームよりもすべてのプレイヤーが多い利得を受けとることになる。

ところが今度は，非協力変動和2人ゲームの利得表が具体的に表2のように与えられているとする[8]。

表 2

	π_{21}	π_{22}
π_{11}	(−3，−3)	(−10，−1)
π_{12}	(−1，−10)	(−8，−8)

2人のプレイヤーが共に利己的行動基準に従って行動する場合，戦略の優越性より利己的均衡点は

$$s_1^* = (0, 1),\quad s_2^* = (0, 1) \tag{1-76}$$

であり，そのときの各プレイヤーの受けとる利得は (−8, −8) となる。

一方，2人のプレイヤーが共に利他的行動基準に従って行動する場合，同様に考えると利他的均衡点は

$$s_1^{*\prime} = (1, 0),\quad s_2^{*\prime} = (1, 0) \tag{1-77}$$

であり，そのときの各プレイヤーの受けとる利得は (−3, −3) となる。

従って表2のような利得表を持つ非協力変動和2人ゲームの場合，利他的ゲームの方が利己的ゲームよりもすべてのプレイヤーが多い利得を受け

とることになる。

以上，表1と表2で示される2つのゲームの結果から，非協力変動和n人ゲームでは，利己的ゲームと利他的ゲームとで，どちらか一方が，全プレイヤーの総利得が多くなるということは証明できないということが証明された。

さらに任意のプレイヤーの利得についても，利己的ゲームと利他的ゲームとで，どちらか一方の利得が多くなるということは証明できないことが証明された。

第2節　協力ゲーム

本節では，特性関数によって表現された協力n人ゲームを取扱う。

全プレイヤーが利己的行動基準に従う場合のゲーム（利己的協力n人ゲーム）と全プレイヤーが利他的行動基準に従う場合のゲーム（利他的協力n人ゲーム）をそれぞれ考察して，両ゲームにおける利得を比較することにする。

それに先立って，まず協力n人ゲームを特性関数で表現するための準備をしておく。

プレイヤー全体の集合をIとすると，

$$I=\{1, 2, \ldots, n\} \tag{2-1}$$

である。結託（coalition）として，

$$S=\{1, 2, \ldots, s\},\quad S\subset I \tag{2-2}$$

$$I-S=\{s+1, s+2, \ldots, n\} \tag{2-3}$$

を考える。各プレイヤー1, 2, …, nの純粋戦略の個数をそれぞれ$k_1, k_2, \ldots, k_n$とすると，Sの各メンバーがそれぞれに選んだ純粋戦略の組$(i_1, i_2, \ldots, i_s)$は全部で$k_1\times k_2\times\cdots\times k_s$という積だけ個数が存在する。この1つ1つ

を共同純粋戦略と呼べば，Sの共同純粋戦略は全部でl個，$(I\text{-}S)$の共同純粋戦略は全部でm個ある。ただし，

$$l=k_1\times k_2\times\cdots\times k_s,\quad m=k_{s+1}\times k_{s+2}\times\cdots\times k_n \tag{2-4}$$

である。そこで改めてSの共同純粋戦略をs次元ベクトルとして

$$\boldsymbol{u}_\alpha\ ;\ \alpha=1,2,\ldots,l \tag{2-5}$$

と書き，$(I\text{-}S)$の共同純粋戦略を$(n\text{-}s)$次元ベクトルとして

$$\boldsymbol{v}_\beta\ ;\ \beta=1,2,\ldots,m \tag{2-6}$$

と書くことにする。

ここで，Sが共同純粋戦略$\boldsymbol{u}_\alpha$を選び，$(I\text{-}S)$が共同純粋戦略$\boldsymbol{v}_\beta$を選んだときのプレイヤーiの利得を$M_i(\boldsymbol{u}_\alpha,\boldsymbol{v}_\beta)$とすると，このときの$S$の利得は

$$M_S(\boldsymbol{u}_\alpha,\boldsymbol{v}_\beta)=\sum_{i=1}^{s}M_i(\boldsymbol{u}_\alpha,\boldsymbol{v}_\beta) \tag{2-7}$$

となり，$(I\text{-}S)$の利得は，

$$M_{I-S}(\boldsymbol{u}_\alpha,\boldsymbol{v}_\beta)=\sum_{i=s+1}^{n}M_i(\boldsymbol{u}_\alpha,\boldsymbol{v}_\beta) \tag{2-8}$$

となる。さて，Sの選択する共同混合戦略Π_Sは，$\boldsymbol{u}_1,\boldsymbol{u}_2,\ldots,\boldsymbol{u}_l$の上の確率分布であり，$(I\text{-}S)$の共同混合戦略$\Pi_{I-S}$は$\boldsymbol{v}_1,\boldsymbol{v}_2,\ldots,\boldsymbol{v}_m$の上の確率分布であるから，それらの成分を明示して，

$$\Pi_S=(p_1,p_2,\ldots,p_l) \tag{2-9}$$

$$\Pi_{I-S}=(q_1,q_2,\ldots,q_m) \tag{2-10}$$

と書くことにする。ただし各p_i, q_jは非負であって，それらの和はいずれも1である。

Sが共同混合戦略Π_Sを選択し，$(I\text{-}S)$が共同混合戦略Π_{I-S}を選択したときのSの利得は

$$E_S(\Pi_S,\Pi_{I-S})=\sum_{\alpha=1}^{l}\sum_{\beta=1}^{m}M_S(\boldsymbol{u}_\alpha,\boldsymbol{v}_\beta)p_\alpha q_\beta \tag{2-11}$$

となり，$(I\text{-}S)$ の利得は

$$E_{I-S}(\Pi_S, \Pi_{I-S}) = \sum_{\alpha=1}^{l}\sum_{\beta=1}^{m} M_{I-S}(\boldsymbol{u}_\alpha, \boldsymbol{v}_\beta)p_\alpha q_\beta \tag{2-12}$$

となる。

1.　利己的協力 n 人ゲーム

全プレイヤーが利己的行動基準に従って行動するという利己的協力 n 人ゲームについては，ゲームの理論から以下のことを引用しておく。

結託 S 及び $(I\text{-}S)$ の特性関数 $V(S)$ 及び $V(I\text{-}S)$ はそれぞれ，

$$V(S) = \max_{\Pi_S}\ \min_{\Pi_{I-S}} E_S(\Pi_S, \Pi_{I-S}) \tag{2-13}$$

$$V(I\text{-}S) = \max_{\Pi_{I-S}}\ \min_{\Pi_S} E_{I-S}(\Pi_S, \Pi_{I-S}) \tag{2-14}$$

で定義される。そして1人もメンバーのいない結託の集合を ϕ とすると

$$V(\phi) = 0 \tag{2-15}$$

である。

次に S と T を共通のメンバーを含まない2つの結託とする。このとき

$$V(S\cup T) \geqq V(S) + V(T)\quad (S\cap T = \phi) \tag{2-16}$$

が成立する。さらに以下の定理も成立する。

定理3

利己的協力ゼロ和 n 人ゲームの特性関数を $V(S)$ とすれば，$V(S)$ は次の3つの性質をもつ。

$$V(\phi) = 0 \tag{2-17}$$

$$V(I\text{-}S) = -V(S) \tag{2-18}$$

$$V(S\cup T) \geqq V(S) + V(T) \tag{2-19}$$

$(S, T\subset I$ かつ $S\cap T = \phi)$

逆に集合 $I = \{1, 2, \ldots, n\}$ のすべての部分集合 S に対して実数値を対応さ

せる関数 $V(S)$ が上の３つの性質を持つならば，$V(S)$ を特性関数として持つ利己的協力ゼロ和 n 人ゲームが存在する。

定理４

利己的協力変動和 n 人ゲームの特性関数を $V(S)$ とすれば，$V(S)$ は次の２つの性質を持つ。

$$V(\phi)=0 \tag{2-20}$$

$$V(S\cup T)\geqq V(S)+V(T)\ \ (S,\ T\subset I\ \text{かつ}\ S\cap T=\phi) \tag{2-21}$$

逆に $I=\{1, 2, \ldots, n\}$ の任意の部分集合 S に対して定義された実数値関数 $V(S)$ が上の２つの性質を持てば，この $V(S)$ を特性関数として持つ利己的協力変動和 n 人ゲームが存在する。

2. 利他的協力 n 人ゲーム

それでは，次に全プレイヤーが利他的行動基準に従って行動する場合について考察する。

結託 S，$(I-S)$ の特性関数はそれぞれ

$$V'(S)=\min_{\Pi_S}\ \max_{\Pi_{I-S}} E_S(\Pi_S, \Pi_{I-S}) \tag{2-22}$$

$$V'(I-S)=\min_{\Pi_{I-S}}\ \max_{\Pi_S} E_{I-S}(\Pi_S, \Pi_{I-S}) \tag{2-23}$$

と定義される。そして１人もメンバーのいない結託の集合 ϕ に対しては

$$V'(\phi)=0 \tag{2-24}$$

が成立する。また S と T を共通のメンバーを含まない２つの結託とすると，

$$V'(S\cup T)\leqq V'(S)+V'(T)\ \ (S\cap T=\phi) \tag{2-25}$$

が成立する。

(2-25) の証明

$$I-(S\cup T)\subset I-S \tag{2-26}$$

$$I-(S\cup T)\subset I-T \tag{2-27}$$

$$S\cap T=\phi \tag{2-28}$$

より，

$$\max_{\Pi_{I-(S\cup T)}} E_{S\cup T}(\Pi_{S\cup T}, \Pi_{I-(S\cup T)})\leqq\max_{\Pi_{I-S}} E_S(\Pi_S, \Pi_{I-S})$$
$$+\max_{\Pi_{I-T}} E_T(\Pi_T, \Pi_{I-T}) \tag{2-29}$$

ここで，SとTが協力して最小化を図る方が，SとTが個別に最小化を図るよりも合計利得を最小化できるので，

$$\min_{\Pi_{S\cup T}}\ \max_{\Pi_{I-(S\cup T)}} E_{S\cup T}(\Pi_{S\cup T}, \Pi_{I-(S\cup T)})\leqq\min_{\Pi_S}\ \max_{\Pi_{I-S}} E_S(\Pi_S, \Pi_{I-S})$$
$$+\min_{\Pi_T}\ \max_{\Pi_{I-T}} E_T(\Pi_T, \Pi_{I-T}) \tag{2-30}$$

が成立する。(2-30) を特性関数の定義に従って V' を用いて書き直すと，(2-25) が得られる。　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　(証明終わり)

なお，特性関数についての2つの性質 (2-24) と (2-25) は，すべての利他的協力n人ゲームに対して成立することに注意すべきである。

ところで，利己的協力n人ゲームの場合に掲げた定理に対応して，利他的協力n人ゲームの場合にも以下の定理が成立する。

定理3′

利他的協力ゼロ和n人ゲームの特性関数を $V'(S)$ とすれば，$V'(S)$ は次の性質を持つ。

$$V'(\phi)=0 \tag{2-31}$$

$$V'(I-S)=-V'(S) \tag{2-32}$$

$$V'(S\cup T)\leqq V'(S)+V'(T) \tag{2-33}$$

$$(S,\ T\subset I,\ S\cap T=\phi)$$

逆に，集合 $I=\{1, 2, \ldots, n\}$ のすべての部分集合Sに対して実数値を対応

させる関数 $V'(S)$ が上の3つの性質を持つならば，$V'(S)$ を特性関数として持つ利他的協力ゼロ和 n 人ゲームが存在する。

定理3′の証明[9]

すべての利他的協力ゼロ和 n 人ゲームの特性関数は，(2-24) と (2-25) を満たすので，(2-31) と (2-33) を満たしている。さらにゼロ和ということから

$$V'(S)+V'(I-S)=0 \tag{2-34}$$

が成立するので，(2-32) も満たしている。

そこで，ここでは (2-31), (2-32), (2-33) を満たす任意の実数値関数 $V_0(S)$ に対して，この $V_0(S)$ を特性関数とするような利他的協力ゼロ和 n 人ゲームが常に存在することを証明すればよい。そこで $V_0(S)$ が与えられたもとで，次のような利他的協力ゼロ和 n 人ゲームを定義する[10]。

各プレイヤー $k(=1, 2, \ldots, n)$ は，人為手番として，k を含む I の部分集合 S_k を選択する。ここでプレイヤーの集合 S は，すべての $k\in S$ に対して，

$$S_k=S \tag{2-35}$$

を満たす場合に輪と呼ばれる。共通な元を持つ2つの輪は一致する。換言すれば，すべての輪の集合は，どの2つも互いに交わらない I の部分集合の系をなしている。

こうして定義されたどの輪にも含まれないプレイヤーは，1人だけで集合を形成しているとみなし，1人集合と呼ぶ。それゆえ，すべての輪とすべての1人集合の全体は I の分割をなす。それらの集合を $S_1, S_2, \ldots, S_d$ で表わすと，

$$I=S_1\cup S_2\cup\ldots\cup S_d \tag{2-36}$$

ただし $S_i\cap S_j=\phi(i\neq j)$

この部分集合 $S_i(i=1, 2, \dots, d)$ に属するプレイヤーの人数を n_i とする。すなわち，

$$\sum_{i=1}^{d} n_i = n \tag{2-37}$$

である。

上記のプレイの結果，部分集合 S_i に属するプレイヤーに対しては一律に

$$\frac{1}{n_i} V_0(S_i) - \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{d} V_0(S_j) \tag{2-38}$$

だけの利得を与えるものとする。この場合，各プレイヤーの利得の総和は，

$$\begin{aligned}&\sum_{i=1}^{d} n_i \left\{\frac{1}{n_i} V_0(S_i) - \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{d} V_0(S_j)\right\}\\ &= \sum_{i=1}^{d} V_0(S_i) - \sum_{i=1}^{d} V_0(S_j)\\ &=0\end{aligned} \tag{2-39}$$

となるので，このゲームはゼロ和である。以上により，利他的協力ゼロ和 n 人ゲームが定義された。

そこでこの利他的協力ゼロ和 n 人ゲームの特性関数を $V'(S)$ とする。この $V'(S)$ と $V_0(S)$ が等しいことが証明できれば，$V_0(S)$ を特性関数とするような利他的協力ゼロ和 n 人ゲームの存在が証明されることになる。

そこでまず，すべての $S \subset I$ に対して

$$V'(S) \leqq V_0(S) \tag{2-40}$$

となることを示す。

$V_0(S), V'(S)$ は共に (2-31)，(2-32)，(2-33) を満たすので，$S=\phi$ のときには，

$$V_0(\phi)=0 \tag{2-41}$$

$$V'(\phi)=0 \tag{2-42}$$

となり，(2-40) が成立する。

$S\neq\phi$ のとき，Sの全メンバーが結託して全員で (2-36) のうちの S_1を構成するとする。このとき $S=S_1$ が全体として獲得できる利得合計は，

$$n_1\left\{\frac{1}{n_1}V_0(S)-\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{d}V_0(S_j)\right\}=V_0(S)-\frac{n_1}{n}\sum_{j=1}^{d}V_0(S_j) \tag{2-43}$$

となる。ところがSの特性関数である $V'(S)$ は，定義によりこれを上回ることはあり得ない。そこで

$$V'(S)\leqq V_0(S)-\frac{n_1}{n}\sum_{j=1}^{n}V_0(S_j) \tag{2-44}$$

が成立する。ところが $V_0(S)$ は特性関数の性質 (2-31)，(2-32)，(2-33) を満たしているので，

$$\sum_{j=1}^{d}V_0(S_j)\geqq V_0(I)=-V_0(\phi)=0 \tag{2-45}$$

となり，ゆえに

$$V'(S)\leqq V_0(S) \tag{2-46}$$

が示された。

(2-46) はすべてのSについて成立するので，$(I-S)$ に対して適用すると，

$$V'(I-S)\leqq V_0(I-S) \tag{2-47}$$

となるが，(2-32) より

$$V'(I-S)=-V'(S) \tag{2-48}$$

$$V_0(I-S)=-V_0(S) \tag{2-49}$$

であるので，(2-47) に代入すると，

$$-V'(S)\leqq -V_0(S) \tag{2-50}$$

$$\therefore V'(S) \geqq V_0(S) \tag{2-51}$$

を得る。(2-51) と (2-46) より,

$$V'(S) = V_0(S) \tag{2-52}$$

が成立する。従って $V_0(S)$ は上記の利他的協力ゼロ和 n 人ゲームの特性関数になっており，これで $V_0(S)$ を特性関数として持つ利他的協力ゼロ和 n 人ゲームの存在が示された。

（証明終わり）

定理 4′

利他的協力変動和 n 人ゲームの特性関数を $V'(S)$ とすれば，$V'(S)$ は次の2つの性質を持つ。

$$V'(\phi) = 0 \tag{2-53}$$

$$V'(S \cup T) \leqq V'(S) + V'(T) \quad (S, T \subset I \text{ かつ } S \cap T = \phi) \tag{2-54}$$

逆に $I = \{1, 2, \ldots, n\}$ の任意の部分集合 S に対して定義された実数値関数 $V'(S)$ が上の2つの性質を持てば，この $V'(S)$ を特性関数として持つ利他的協力変動和 n 人ゲームが存在する。

定理 4′の証明[11]

利他的協力変動和 n 人ゲームの特性関数が (2-53), (2-54) を満たすことはすでに示されている。そこで定理の後半部分を証明する。

$V'(S)$ を，(2-53), (2-54) を満たす実数値関数とする。そして I にダミープレイヤー ($n+1$) を付け加えた集合を $\bar{I}$ とする。すなわち,

$$\bar{I} = \{1, 2, \ldots, n, n+1\} \tag{2-55}$$

である。

ここでダミープレイヤーは，残りの n 人のプレイヤーが受けとる合計利

得に（−1）を掛けた利得を受けとるものとする。こうすると（$n+1$）人のプレイヤーの受けとる合計利得は常にゼロになる。ただしダミープレイヤーは，選択すべき自分の戦略を持たず，利得を受けとる役割しか持たない。また結託構成に際してもダミープレイヤーは交渉の場には加わらないし，いかなる結託にも参加しないものとする。

さて $\bar{I}$ の各部分集合 S に対して $\bar{V}(S)$ を次のように定義する。

S が（$n+1$）を含まないとき $\bar{V}(S)=V'(S)$

S が（$n+1$）を含むとき $\bar{V}(S)=-V'(\bar{I}-S)$

このとき，$\bar{V}(S)$ は，ある利他的協力ゼロ和（$n+1$）人ゲームの特性関数になっていることが示される。それを示すには，$\bar{V}(S)$ が定理3′の（2-31），（2-32），（2-33）に相当する性質を満たすことを言えばよい。

まず（$n+1$）が ϕ に含まれないことから

$$\bar{V}(\phi)=V'(\phi)=0 \tag{2-56}$$

となり（2-31）に相当する性質は満たされる。

次に（$n+1$）が S に含まれているとき，$\bar{V}(S)$ の定義より

$$\bar{V}(S)=-V'(\bar{I}-S) \tag{2-57}$$

であり，このとき（$\bar{I}-S$）は（$n+1$）を含まないので

$$\bar{V}(\bar{I}-S)=V'(\bar{I}-S) \tag{2-58}$$

となる。ゆえに（2-57）と（2-58）より

$$\bar{V}(\bar{I}-S)=-\bar{V}(S) \tag{2-59}$$

を得る。他方（$n+1$）が S に含まれないとき，

$$\bar{V}(S)=V'(S) \tag{2-60}$$

であり，（$\bar{I}-S$）は（$n+1$）を含むので

$$\bar{V}(\bar{I}-S)=-V'(\bar{I}-\bar{I}+S)=-V'(S) \tag{2-61}$$

となる。ゆえに（2-60）と（2-61）より

$$\bar{V}(\bar{I}-S)=-\bar{V}(S) \tag{2-62}$$

を得る。従って（2-32）に相当する性質も満たされる。

最後の（2-33）に相当する性質が満たされていることを示すために，$S \cap T = \phi$ となる S と T を任意にとる。$(n+1)$ が S にも T にも含まれていないときには当然 $S \cup T$ にも含まれていないので，

$$\bar{V}(S \cup T) = V'(S \cup T) \tag{2-63}$$

$$\bar{V}(S) = V'(S) \tag{2-64}$$

$$\bar{V}(T) = V'(T) \tag{2-65}$$

であって，V' については（2-54）が成立しているので，

$$\bar{V}(S \cup T) \leqq \bar{V}(S) + \bar{V}(T) \tag{2-66}$$

を得る。

そこで $(n+1)$ が S に含まれているとする。このとき T は $(n+1)$ を含まない。また $\bar{I}-(S \cup T)$ も $(n+1)$ を含まない。ところが，

$$T \cap \{\bar{I}-(S \cup T)\} = \phi \tag{2-67}$$

であるので，（2-54）より

$$V'\{T \cup \bar{I}-(S \cup T)\} \leqq V'(T) + V'\{\bar{I}-(S \cup T)\} \tag{2-68}$$

が成立する。ところで $S \cap T = \phi$ より，

$$T \cup \{\bar{I}-(S \cup T)\} = \bar{I}-S \tag{2-69}$$

となるので，（2-68）に（2-69）を代入すると，

$$V'(\bar{I}-S) \leqq V'(T) + V'\{\bar{I}-(S \cup T)\} \tag{2-70}$$

となる。そして T は $(n+1)$ を含まないので

$$\bar{V}(T) = V'(T) \tag{2-71}$$

であり，S と $S \cup T$ は $(n+1)$ を含むので

$$\bar{V}(S) = -V'(\bar{I}-S) \tag{2-72}$$

$$\bar{V}(S \cup T) = -V'\{\bar{I}-(S \cup T)\} \tag{2-73}$$

である。（2-71），（2-72），（2-73）より，（2-70）は

$$-\bar{V}(S) \leqq \bar{V}(T) - \bar{V}(S \cup T) \tag{2-74}$$

$$\therefore \overline{V}(S \cup T) \leqq \overline{V}(S) + \overline{V}(T) \tag{2-75}$$

となる。ゆえに（2-33）に相当する性質も満たされる。

従って $\overline{V}(S)$ は，ある利他的協力ゼロ和（$n+1$）人ゲームの特性関数であることが示された。そこでこの利他的協力ゼロ和（$n+1$）人ゲームからダミープレイヤーを取り除いたゲームを考えると，そのゲームは利他的協力変動和 n 人ゲームであり，このゲームの特性関数は $\overline{V}(S)$ の定義より，$V'(S)$ となっていることがわかる。（証明終わり）

3. 利得の比較

それでは，利己的協力 n ゲームと利他的協力 n 人ゲームにおける利得を比較することにする。

まず，プレイヤー全体の集合 I の特性関数は，利己的ゲームの場合と利他的ゲームの場合にそれぞれ

$$V(I) = \max_{\Pi_I} E_I(\Pi_I) \tag{2-76}$$

$$V'(I) = \min_{\Pi_I} E_I(\Pi_I) \tag{2-77}$$

と定義できる。そこで常に

$$V(I) \geqq V'(I) \tag{2-78}$$

が成立することがわかる。そしてさらに次の定理が成立する。

定理 5

協力ゼロ和 n 人ゲーム及び協力定数和 n 人ゲームにおいては，

$$V(I) = V'(I) \tag{2-79}$$

が成立する。

定理 5 の証明

利己的協力ゼロ和 n 人ゲームについては，定理 3 より

$$V(I)=-V(\phi)=0 \tag{2-80}$$

となる。また利他的協力ゼロ和n人ゲームについては，定理3′より

$$V'(I)=-V'(\phi)=0 \tag{2-81}$$

となるので（2-79）が成立する。

次に協力定数和n人ゲームについて（2-79）が成立することを示す。

各プレイヤー $1, 2, \ldots, n$ は純粋戦略をそれぞれ $k_1, k_2, \ldots, k_n$ 個持っているので，各プレイヤーがそれぞれに選んだ純粋戦略の組（$i_1, i_2, \ldots, i_n$）は全部で $k_1 \times k_2 \times \cdots \times k_n$ 個ある。その１つ１つが共同純粋戦略であり，Iとしては，これら共同純粋戦略の上の確率分布の形をとる共同混合戦略 Π_I を選ぶことになる。

$$k_1 \times k_2 \times \cdots \times k_n = K \tag{2-82}$$

とおくと，Iの共同純粋戦略はK個あって，その１つ１つを $\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \ldots, \boldsymbol{u}_K$ と書く。各$\boldsymbol{u}$はn次元ベクトルである。

Iがα番目の共同純粋戦略$\boldsymbol{u}_\alpha$を選んだときのプレイヤーiの利得を $M_i(\boldsymbol{u}_\alpha)$ とすると，Iの利得は

$$M_I(\boldsymbol{u}_\alpha)=\sum_{i=1}^{n} M_i(\boldsymbol{u}_\alpha) \tag{2-83}$$

となる。さらに，Iのとる共同混合戦略 Π_I は，$\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \ldots, \boldsymbol{u}_K$ の上の確率分布なので，それらの成分を明示して

$$\Pi_I=(p_1, p_2, \ldots, p_K) \tag{2-84}$$

（ただし $p_1, \ldots, p_K$ は非負で合計が１）

と書くと，Iの利得 $E_I(\Pi_I)$ は，

$$E_I(\Pi_I)=\sum_{\alpha=1}^{K} M_I(\boldsymbol{u}_\alpha)p_\alpha \tag{2-85}$$

となる。

ところで定数和とは，各プレイヤーの利得 $M_i(\boldsymbol{u}_\alpha)$ の合計が定数となる

ことであるので，(2-83) より

$$M_I(u_\alpha)=C\ (\text{定数}) \quad (\alpha \text{は任意}) \tag{2-86}$$

とおくことができて，(2-85) より

$$E_I(\Pi_I)=\sum_{\alpha=1}^{K} Cp_\alpha=C\sum_{\alpha=1}^{K} p_\alpha=C \tag{2-87}$$

となり，Π_I とは無関係の定数となる。

従って (2-76)，(2-77) より

$$V(I)=V'(I)=C \tag{2-88}$$

が成立する。

逆に，$V(I)=V'(I)$ となるゲームはゼロ和か定数和となることを示す。

相異なる，ある i, j に対して，

$$M_I(u_i)\neq M_I(u_j)\ (1\leqq i, j\leqq K) \tag{2-89}$$

が成立すると，(2-85) における p_i, p_j の値に応じて $E_I(\Pi_I)$ の値は変化する。すなわち，$V(I)=V'(I)$ とはならないように p_i, p_j を定めることができる。これは $V(I)=V'(I)$ という前提に反する。

従って任意の i, j に対して，

$$M_I(u_i)=M_I(u_j)\ (1\leqq i, j\leqq K) \tag{2-90}$$

が成立する。これは，ゼロ和もしくは定数和ゲームであることを意味する。　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　（証明終わり）

この定理5と (2-78) より次の系が得られる。

系

協力変動和 n 人ゲームにおいては常に，

$$V(I)>V'(I) \tag{2-91}$$

となる。

さて，協力 n 人ゲームのプレイの結果，最終的にプレイヤー全体の集合

Iが，d個の結託に分割されたとする。そしてその分割された集合をS_i $(i=1, \dots, d)$とする。すなわち，

$$I=S_1 \cup S_2 \cup \dots \cup S_d \tag{2-92}$$

ただし$S_i \cap S_j=\phi (i \neq j)$

である。ここでdが1のときと2以上のときの2つに場合分けして考えてみる。

(i)　$d=1$のとき

全プレイヤーの受けとる総利得はIの特性関数で示される。ゆえに利己的協力n人ゲームと利他的協力n人ゲームにおける全プレイヤーの受けとる総利得を比較すると，定理5より，利己的協力ゼロ和（定数和）n人ゲームにおける総利得は，利他的協力ゼロ和（定数和）n人ゲームにおける総利得と一致することがわかる。また定理5の系より，利己的協力変動和n人ゲームにおける総利得は，利他的協力変何和n人ゲームにおける総利得を常に上回ることがわかる。

(ii)　$d \geqq 2$のとき

協力n人ゲームは，$S_i(i=1, \dots, d)$をプレイヤーとする非協力d人ゲームに帰着させることができる。そこで前節で得られた非協力ゲームについての結論をそのまま利用することができる。

すなわち，利己的協力n人ゲームと利他的協力n人ゲームにおける全プレイヤーの受けとる総利得を比較すると，利己的協力ゼロ和（定数和）n人ゲームにおける総利得は，利他的協力ゼロ和（定数和）n人ゲームにおける総利得と一致する。

そして利己的協力変動和n人ゲームにおける総利得と利他的協力変動和n人ゲームにおける総利得を比べると，どちらか一方が常に多くなるとい

うことを証明できないことが証明されている。

さらに任意の結託 S_i の受けとる利得についても，利己的協力変動和 n 人ゲームと利他的協力変動和 n 人ゲームとで，どちらか一方の利得が多くなるということは証明できないことが証明されている。

おわりに

一見すると，相手を思いやり，相手に与える利得をできるだけ多くするということは，自分の利得を減らす行為であるように思われるが，本論文で明らかになったように，社会のすべての構成員がそうした利他的行動をとる場合には，自分の利得をできるだけ多くしようと頑張った場合とほぼ同じ結果が得られる。

なおゲームの理論の立場から言えば，第1節2.(3)で示された，表1のような利得表を持つゲームを考察することにより，利他的行動基準も利己的行動基準と同じく規範的行動基準とはなり得ないことがわかる。

≪註≫

（1） 平山朝治『比較経済思想』近代文藝社，1993年，65～69ページ。

（2） フォン・ノイマン＝モルゲンシュテルン（銀林浩・橋本和美・宮本敏雄監訳）『ゲームの理論と経済行動』第2巻，東京図書株式会社，1972年，81～86ページ。（J. v. Neumann & O. Morgenstern, *THEORY OF GAMES AND ECONOMIC BEHAVIOR,* Princeton, 1953.）

（3） 小山昭雄『ゲームの理論入門』日本経済新聞社，1985年，.71・72ページ。

（4） $s_1^{*\prime}, s_1^{*\prime\prime}$ が共にプレイヤーの最善混合戦略であり，$s_2^{*\prime}, s_2^{*\prime\prime}$ が共にプレイヤー2の最善混合戦略であれば，

$$f(s_1^{*\prime}, s_2^{*\prime})=f(s_1^{*\prime}, s_2^{*\prime\prime})=f(s_1^{*\prime\prime}, s_2^{*\prime})=f(s_1^{*\prime\prime}, s_2^{*\prime\prime})$$

であって，4点 $(s_1^{*\prime}, s_2^{*\prime})$，$(s_1^{*\prime}, s_2^{*\prime\prime})$，$(s_1^{*\prime\prime}, s_2^{*\prime})$，$(s_1^{*\prime\prime}, s_2^{*\prime\prime})$ はいずれも利他的均衡点である。さらに，$s_1^{*\prime}$ と $s_1^{*\prime\prime}$ の加重平均はすべてプレイヤー1の最善混合戦略であり，$s_2^{*\prime}$ と $s_2^{*\prime\prime}$ の加重平均はすべてプレイヤー2の最善混合戦略である。（証明略）

（5） $n=2$ のとき，非協力ゼロ和 n 人ゲームの利他的均衡点がゼロ和2人ゲームの利他的均衡点に一致することを示しておく。

（1-46）より，$n=2$ のときの利他的均衡点 $s^{*\prime}$ は，以下の条件を満たす。

$$\begin{cases} f_1(s^{*\prime})=\min_{s_1} f_1(\bar{s}_1^{*\prime}, s_1) \\ f_2(s^{*\prime})=\min_{s_2} f_2(\bar{s}_2^{*\prime}, s_2) \end{cases}$$

以上まとめて，（註-1）

ところでゼロ和ゲームであることから，任意の s_1, s_2 に対して

$$f_2(s_1, s_2)=-f_1(s_1, s_2) \qquad \text{（註-2）}$$

一方，（註-1）の第2式より

$$-f_2(s^{*\prime})=\max_{s_2}\{-f_2(\bar{s}_2^{*\prime}, s_2)\} \qquad \text{（註-3）}$$

これに（註-2）を代入して

$$f_1(s^{*\prime})=\max_{s_2} f_1(\bar{s}_2^{*\prime}, s_2) \qquad \text{（註-4）}$$

（註-1）の第1式と（註-4）より，

$$\max_{s_2} f_1(\bar{s}_2^{*\prime}, s_2)=f_1(s^{*\prime})=\min_{s_1} f_1(\bar{s}_1^{*\prime}, s_1) \qquad \text{（註-5）}$$

ところでゼロ和2人ゲームでは

$$\bar{s}_2^{*\prime}=s_1^{*\prime},\ \bar{s}_1^{*\prime}=s_2^{*\prime},\ f_1(s)=f(s) \qquad \text{（註-6）}$$

であるので，（註-5）を書き換えて，

$$\max_{s_2} f(s_1^{*\prime}, s_2)=f(s^{*\prime})=\min_{1} f(s_1, s_2^{*\prime}) \qquad \text{（註-7）}$$

これは，$s^{*\prime}=(s_1^{\prime}, s_2^{\prime})$ がゼロ和2人ゲームの利他的均衡点であることを意味する。

（6） 鈴木光男『ゲームの理論』勁草書房，1980年，172～174ページ。

（7） 前掲『ゲームの理論入門』102・103ページ。

（8） 同上，106～109ページ。

（9） 同上，140～142ページ。

（10） 前掲『ゲームの理論と経済行動』第3巻，39・40ページ。

（11） 前掲『ゲームの理論入門』142～145ページ。

（12） 同上，149・150ページ。